

В. В. Стружанов, Вяч. В. Башуров,
П. Ф. Каримов

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПАРАМЕТРОВ ИНКРЕМЕНТАЛЬНОГО ЗАКОНА ПЛАСТИЧНОСТИ ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ СРЕД

В работе [1] исследовался так называемый инкрементальный закон пластического течения, который был введен для изучения деформирования и разрушения упругопластических сред, обладающих эффектом разупрочнения. Его применение требует знания изменения инкрементальных модулей материала в процессе деформирования по произвольному пути нагружения, что является самостоятельной проблемой.

Ниже последняя задача рассматривается для сред, сохраняющих изотропность при любом нагружении, причем полагается, что тензоры напряжений и деформаций, возникающих в среде от действия внешней нагрузки, имеют матрицы диагонального вида, а деформации малы. В качестве примера решена осесимметричная задача о разрушении равномерно растягиваемого тонкого диска, внутренняя область которого ослаблена и может проходить все стадии деформирования, вплоть до разупрочнения и разрушения. Рассмотрено также разрушение диска от действия собственных (остаточных) напряжений.

1. Свойства материала при одноосном растяжении

Возьмем кубический представительный объем материала, с гранями которого свяжем прямоугольную систему координат $x_1x_2x_3$. Будем растягивать его вдоль оси x_1 , задавая величину продольной деформации ε_1 и регистрируя значения поперечных деформаций $\varepsilon_2, \varepsilon_3$ ($\varepsilon_2 = \varepsilon_3$). При этом напряжение σ_1 ($\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) определяем как отношение растягивающего усилия к первоначальной площади поперечного сечения элементарного объема.

В результате равновесного вплоть до разрушения деформирования получаем зависимость $\sigma_1(\varepsilon_1)$, которая определяет так называемую полную диаграмму деформирования (рис.1, кри-

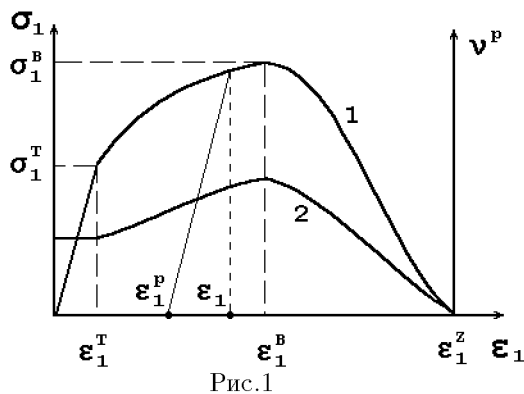


Рис.1

вая 1), имеющую восходящие участки (упругость — $0 \leq \varepsilon_1 < \varepsilon_1^T$, $0 \leq \sigma_1 < \sigma_1^T$, упрочнение — $\varepsilon_1^T \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_1^B$, $\sigma_1^T \leq \sigma_1 \leq \sigma_1^B$) и падающую, возможно до нуля, ветвь (разупрочнение — $\varepsilon_1^B < \varepsilon_1 \leq \varepsilon_1^Z$) [2]. Разделение элемента на части происходит в момент, когда $\sigma_1 = 0$, а деформация ε_1 достигает некоторого предельного значения ε_1^Z . Здесь $\sigma_1^T, \sigma_1^B, \varepsilon_1^T, \varepsilon_1^B$ — соответственно пределы текучести и прочности и деформации, им отвечающие.

На восходящей ветви состояние материала устойчивое, на ниспадающей — неустойчивое, причем неустойчивое состояние реализуется только тогда, когда материал находится в составе устойчивой механической системы [3]. Растяжение с контролем по деформациям обеспечивает указанные условия.

По найденным зависимостям определяем $E^p(\varepsilon_1) = d\sigma_1/d\varepsilon_1$ и $\nu^p(\varepsilon_1) = -d\varepsilon_2/d\varepsilon_1$, т.е. мгновенный (касательный, инкрементальный) модуль и мгновенный коэффициент поперечной деформации, график которого показан на рис.1, кривая 2. На упругом участке E^p и ν^p равняются соответственно модулю Юнга E и коэффициенту Пуассона ν . На стадии упрочнения $E > E^p > 0$, при разупрочнении $E^p < 0$ и $E^p(\varepsilon_1^B) = 0$.

Справедливы следующие инкрементальные соотношения:

$$d\sigma_1 = E^p d\varepsilon_1, \quad (1)$$

$$d\sigma_0 = K^p d\varepsilon_0, \quad d\tau = G^p d\gamma. \quad (2)$$

Здесь K^p, G^p — мгновенные объемный модуль и модуль сдвига, $d\sigma_0, d\varepsilon_0$ — приращения компонент шаровых тензоров напряжений и деформаций, $d\tau, d\gamma$ — приращение максимальных касательных напряжений и сдвигов.

При одноосном растяжении имеем

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sigma_1/3, \quad d\sigma_0 = d\sigma_1/3, \quad \tau = \sigma_1/2, \quad d\tau = d\sigma_1/2, \\ \varepsilon_0 &= \left(\varepsilon_1 - 2 \int_0^{\varepsilon_1} \nu^p d\varepsilon_1 \right) / 3, \quad d\varepsilon_0 = d\varepsilon_1 (1 - 2\nu^p) / 3, \\ \gamma &= \varepsilon_1 + \int_0^{\varepsilon_1} \nu^p d\varepsilon_1, \quad d\gamma = d\varepsilon_1 (1 + \nu^p). \end{aligned} \quad (3)$$

Подставляя теперь выражения (3) в соотношения (2) и учитывая равенство (1), получаем

$$K^p = E^p / (1 - 2\nu^p), \quad G^p = 0.5 E^p / (1 + \nu^p). \quad (4)$$

Легко проверяется, что

$$\begin{aligned} \int_0^{\varepsilon_1^Z} E^p d\varepsilon_1 &= 0, \quad \int_0^{\varepsilon_0^Z} K^p d\varepsilon_0 = 0, \quad \int_0^{\gamma^Z} G^p d\gamma = 0, \\ \varepsilon_0^Z &= \left(\varepsilon_1^Z + 2\varepsilon_2 \left(\varepsilon_1^Z \right) \right) / 3, \quad \gamma^Z = \varepsilon_1^Z - \varepsilon_2 \left(\varepsilon_1^Z \right), \end{aligned}$$

где $\varepsilon_0^Z, \gamma^Z$ — предельные объемная деформация и сдвиг, отвечающие ε_1^Z , причем $\varepsilon_2(\varepsilon_1^Z) = -\int_0^{\varepsilon_1^Z} \nu^p d\varepsilon_1$ — полная поперечная деформация в момент разрушения.

Отметим, что соотношения (4) согласуются с выражениями, полученными из других соображений в работе [4].

Из первого равенства (4) следует

$$\nu^p = 0.5 - 0.5E^p/K^p.$$

Так как величина ν^p ограничена, E^p стремится к нулю быстрее, чем K^p . Отсюда $\nu^p \rightarrow 0.5$ при $\varepsilon_1 \rightarrow \varepsilon_1^B$. Если E^p становится меньше нуля, то K^p не может сохранять положительное значение, т.к. в противном случае $\nu^p > 0.5$, что невозможно из энергетических соображений. На падающей ветви $\nu^p > 0$, если $0 > E^p > K^p$; $\nu^p = 0$, если $E^p = K^p$; $\nu^p < 0$, если $0 > K^p > E^p$.

Приведенные рассуждения и выражения (4) показывают, что все модули одновременно принимают отрицательные значения, т.е. одновременно снижается сопротивление материала объемным и сдвиговым деформациям.

2. Определяющие соотношения при одноосном растяжении

При изотермическом процессе элементарная работа деформации совершается за счет возрастания свободной энергии, которая в данном случае равна $F = E\varepsilon_1^e\varepsilon_1^e/2\rho$, где ρ — плотность материала, ε_1^e — упругая деформация. Здесь и ниже полагаем, что модуль разгрузки не изменяется (пластические деформации не влияют на упругие свойства материала) и $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^e + \varepsilon_1^p$ (ε_1^p — пластическая составляющая деформации) (рис.1).

Тогда [5]

$$\sigma_1 = \rho \partial F / \partial \varepsilon_1^e = E\varepsilon_1^e = E(\varepsilon_1 - \varepsilon_1^p), \quad (5)$$

$$dg = \sigma_1 d\varepsilon_1^p \geq 0, \quad (6)$$

где dg — механическая диссипация энергии. Далее, используя равенство (5), получаем

$$E^p = d\sigma_1/d\varepsilon_1 = E(d\varepsilon_1 - d\varepsilon_1^p)/d\varepsilon_1.$$

Отсюда закон, определяющий кинетику развития неупругих деформаций, имеет вид

$$d\varepsilon_1^p = (1 - E^p/E)d\varepsilon_1 = (1 - E^p/E)d\sigma_1/E^p. \quad (7)$$

Так как выражение (7) определяется инкрементальным модулем E^p , будем называть его инкрементальным законом течения. Для других компонент деформаций находим $d\varepsilon_2 = d\varepsilon_2^e + d\varepsilon_2^p$, $d\varepsilon_2^e = -\nu d\sigma_1/E = -\nu E^p d\varepsilon_1/E$, $d\varepsilon_2 =$

$= -\nu^p d\sigma_1/E^p = -\nu^p d\varepsilon_1$ и, наконец,

$$d\varepsilon_2^p = d\varepsilon_3^p = (\nu/E - \nu^p/E^p) d\sigma_1 = (1 - E^p\nu/E\nu^p) d\varepsilon_2. \quad (8)$$

Аналогично, используя соотношения (2), получаем

$$d\varepsilon_0^p = (1 - K^p/K) d\varepsilon_0 = (1 - K^p/K) d\sigma_0/K^p, \quad (9)$$

$$d\gamma^p = (1 - G^p/G) d\gamma = (1 - G^p/G) d\tau/G^p. \quad (10)$$

Здесь $d\varepsilon_1^p, d\varepsilon_2^p, d\varepsilon_3^p, d\varepsilon_0^p, d\gamma^p$ — соответственно приращения продольных, поперечных, объемных и сдвиговых пластических деформаций. K, G — объемный модуль и модуль сдвига на стадии упругости.

Введем теперь модуль упрочнения (разупрочнения) h^p таким образом:

$$h^p = d\sigma_1/d\varepsilon_1^p. \quad (11)$$

Он определяется касательной к кривой $\sigma_1(\varepsilon_1^p)$, в которую можно перестроить диаграмму $\sigma_1(\varepsilon_1)$ с учетом того, что

$$\varepsilon_1^p(\varepsilon_1) = \int_0^{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{E^p(\varepsilon_1)}{E}\right) d\varepsilon_1.$$

Используя закон (7), находим

$$d\varepsilon_1^p = h^p d\varepsilon_1^p (E - E^p)/EE^p.$$

Отсюда

$$h^p = EE^p/(E - E^p). \quad (12)$$

На стадии упрочнения $h^p > 0$, на стадии разупрочнения $h^p < 0$. Отметим, что аналогично функция упрочнения вводится в [6] для диаграммы $\tau - \gamma$.

Запишем выражение (6) с учетом равенства (11) в виде

$$dg = \sigma_1 d\sigma_1/h^p.$$

При растяжении на стадии упрочнения $\sigma_1 > 0$, $d\sigma_1 > 0$, $h^p > 0$, на стадии разупрочнения $\sigma_1 > 0$, $d\sigma_1 < 0$, $h^p < 0$. Таким образом, dg действительно больше нуля на всех этапах деформирования. Следовательно, процесс разупрочнения не противоречит законам термодинамики. При разрушении (после разделения на части) материал теряет способность диссипировать энергию. Поэтому $dg = 0$. Отсюда в момент разрушения $\sigma_1 = 0$ (точка падающей ветви, отвечающая деформации ε_1^Z) и $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^p$.

Введем еще два параметра, а именно коэффициент дилатансии, который с учетом формул (9) и (10) равен

$$\beta = \frac{d\varepsilon_0^p}{d\gamma^p} = \frac{G(K - K^p)}{K(G - G^p)} \frac{d\varepsilon_0}{d\gamma}, \quad (13)$$

и коэффициент остаточной (после разгрузки) поперечной деформации $\nu_r = -d\varepsilon_2^p/d\varepsilon_1^p$, или с учетом формул (7) и (8)

$$\nu_r = (E\nu^p - E^p\nu)/(E - E^p). \quad (14)$$

3. Определяющие соотношения для сложнапряженного состояния

Пусть напряженно-деформированное состояние элемента материала определяют тензоры, матрицы которых имеют диагональный вид. В этом случае напряжения определяют вектор σ с компонентами $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, а деформации — вектор ε с компонентами $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$. Повторяя рассуждения, использованные при выводе формул (5) и (6), получаем

$$\sigma = c \cdot (\varepsilon - \varepsilon^p), \quad (15)$$

$$dg = \sigma \cdot d\varepsilon^p \geq 0, \quad (16)$$

где $d\varepsilon^p$ — приращение вектора пластических деформаций, c — тензор второго ранга механических характеристик материала, точкой обозначено скалярное произведение. В силу уменьшения размерности (напряжения и деформации определяются тремя компонентами вместо обычных шести) здесь возможно вместо симметричных тензоров четвертого ранга, определяющих механические характеристики материала, использовать соответствующие симметричные тензоры второго ранга. Для изотропного материала компоненты тензора c равны: $c_{11} = c_{22} = c_{33} = (1 - \nu)E/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$, $c_{12} = c_{13} = c_{23} = \nu E/(1 + \nu)(1 - 2\nu)$.

Из выражения (15) следует, что любой вектор реальных напряжений можно представить в виде разности $\sigma = \sigma^c - \sigma^p$, где $\sigma^c = c \cdot \varepsilon$ — вектор идеальных напряжений, которые при заданной деформации появились бы в материале с идеально упругими свойствами, а $\sigma^p = c \cdot \varepsilon^p$ — вектор релаксационных напряжений, характеризующий уровень падения напряжений от идеально упругого состояния. Таким образом, при деформировании в материале происходят как бы два процесса. Сначала при сохранении идеально упругих свойств возникают напряжения, составляющие вектор σ^c . Затем за весьма малый промежуток времени происходит пластическая деформация,

в результате которой напряжения релаксируют на величину, определяемую компонентами вектора σ^p .

Теперь из (15) получаем $d\sigma = c \cdot (d\varepsilon - d\varepsilon^p)$. Подставляя сюда инкрементальное соотношение

$$d\sigma = c^p \cdot d\varepsilon, \quad (17)$$

где $d\sigma$, $d\varepsilon$ — приращения векторов напряжений и полных деформаций, c^p — тензор второго ранга мгновенных механических характеристик материала, находим

$$d\varepsilon^p = (\Lambda - s \cdot c^p) \cdot d\varepsilon = (\Lambda - s \cdot c^p) \cdot s^p \cdot d\sigma = (s^p - s) \cdot d\sigma = w \cdot d\sigma. \quad (18)$$

Здесь $s = c^{-1}$, $s^p = (c^p)^{-1}$, $s \cdot c = \Lambda$, $s^p \cdot c^p = \Lambda$, Λ — единичный тензор второго ранга. Компоненты тензора s для изотропного материала равны: $s_{11} = s_{22} = s_{33} = 1/E$, $s_{12} = s_{13} = s_{23} = -\nu/E$. Компоненты тензоров c^p и s^p определяются посредством замены величин E, ν в тензорах c, s на значения E^p, ν^p . Отсюда, производя необходимые преобразования с учетом формул (12) и (14), вычисляем компоненты тензора w : $w_{11} = w_{22} = w_{33} = 1/h^p$, $w_{12} = w_{13} = w_{23} = -\nu_r/h^p$.

Далее в работе [1] показано, что из постулата А.А.Ильюшина следует выпуклость в трехмерном пространстве напряжений предельной поверхности $f = 0$, разделяющей упругое и упругопластическое состояния материала, а также ортогональность вектора $d\varepsilon^p$ к этой поверхности и справедливость неравенства (16) при активном нагружении на всех стадиях деформирования, включая разупрочнение.

Применяя теперь методологию исследования [1] для данного случая, получим следующие результаты. В силу свойства градиентальности вектора $d\varepsilon^p$ справедлив ассоциированный закон течения [7]

$$d\varepsilon^p = k N N \cdot d\sigma. \quad (19)$$

Сравнивая его с инкрементальным законом (18), получаем равенство

$$w = k N N. \quad (20)$$

Здесь N — вектор внешней нормали к поверхности $f = 0$ с компонентами $\partial f / \partial \sigma_k$ ($k = 1, 2, 3$), $N N$ — диадное произведение векторов — симметричный тензор второго ранга, k — параметр материала. Непосредственно проверяется, что произведение $N N$ не может сформировать тензор w . Следовательно, для гладких предельных поверхностей равенство (20) не выполняется.

Однако при определенной негладкости поверхности равенство (20) может выполняться. Тензор w для изотропного материала представим в виде [8]

$$w = m \lambda \lambda + n \Lambda,$$

где λ — единичный вектор, $\lambda\lambda$ — диадное произведение, $m = -\nu_r/h^p$, $n = (1 + \nu_r)/h^p$. Используя ортонормированный базис $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ в евклидовом пространстве трехмерных векторов, представим единичный тензор второго ранга в виде суммы [8]

$$\Lambda = \lambda_1\lambda_1 + \lambda_2\lambda_2 + \lambda_3\lambda_3.$$

Здесь векторы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ имеют соответственно компоненты $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Тогда

$$w = m\lambda\lambda + n(\lambda_1\lambda_1 + \lambda_2\lambda_2 + \lambda_3\lambda_3).$$

Подставляя данное выражение в формулу (18), находим, что вектор $d\varepsilon^p$ представляется суммой четырех векторов.

Такое же выражение для вектора $d\varepsilon^p$ можно получить, если точка нагружения на предельной поверхности будет угловой точкой, образованной пересечением четырех поверхностей — плоскостей:

$$\begin{aligned} f_0 &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 - (\sigma \cdot \lambda)\lambda = 0, \\ f_k &= \sigma_k - (\sigma \cdot \lambda_k)\lambda_k = 0, \quad (k = 1, 2, 3). \end{aligned}$$

Параметр k в законе (19) для этих поверхностей имеет значения $k_0 = m$, $k_j = n$ ($j = 1, 2, 3$). Вектор внешней нормали N_0 к поверхности $f_0 = 0$, которая представляет собой октаэдрическую плоскость, коллинеарен вектору $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, внешние нормали N_1, N_2, N_3 к остальным поверхностям коллинеарны соответственно векторам $\pm\lambda_1, \pm\lambda_2, \pm\lambda_3$, причем знак зависит от того, в каком квадранте расположена угловая точка.

Отметим, что при упрочнении параметры k_j положительны ($d\sigma \cdot N_j > 0$), а на стадии разупрочнения отрицательны — ($d\sigma \cdot N_j < 0$). Это обеспечивает выполнение неравенства $d\varepsilon_j^p \cdot N_j > 0$, т.е. векторы $d\varepsilon_j^p$ всегда направлены вовне предельной поверхности. Знак параметра k_0 на стадии упрочнения, как правило, отрицательный ($E^p < E, \nu^p > \nu, h^p > 0, \nu_r > 0$). В случае разупрочнения величина $k_0 > 0$ при $\nu^p > 0$. Если же $\nu^p < 0$, то знак параметра k_0 зависит от конкретных значений ν^p и E^p .

4. Определение инкрементальных модулей при сложнапряженном состоянии

Для вычисления приращений пластических (неупругих) деформаций по инкрементальному закону должно быть известно изменение компонент тензора w при реализуемом пути нагружения. В случае изотропного материала для этого достаточно знать инкрементальные модули E^p, ν^p .

Считаем, что начальная поверхность текучести определена традиционным образом, например, представляется цилиндром Мизеса. Когда конец вектора σ_t напряжений попадает на эту поверхность, то образуется угловая точка t , описанная выше. Инкрементальные модули принимают значения $E_t^p = E^T$, $\nu_t^p = \nu^T$, равные модулям, определенным при простом растяжении для $\varepsilon_1 = \varepsilon_1^T$. Далее полагаем, что при любых догружениях $d\sigma_t$, исходящих из угловой точки t , материал изотропен и его свойства характеризуются модулями E_t^p , ν_t^p ($w = w_t$).

В конце вектора $d\sigma_t$ снова получаем угловую точку (точка a), в которой материал обладает уже новыми свойствами. Для их определения применим следующую процедуру. Из опыта на простое растяжение известны зависимости $E^p(\varepsilon_1)$, $\nu^p(\varepsilon_1)$. Используя формулу (6), определим величину диссипации для каждого значения деформации:

$$g(\varepsilon_1) = \{0, \varepsilon_1 \leq \varepsilon_1^T; \int_{\varepsilon_1^T}^{\varepsilon_1} \sigma(\varepsilon_1) \left(1 - \frac{E^p(\varepsilon_1)}{E}\right) d\varepsilon_1, \varepsilon_1 > \varepsilon_1^T\} \quad (21)$$

и получим зависимости $E^p = \varphi(g)$, $\nu^p = \psi(g)$. Отметим, что $g(\varepsilon^Z)$ — максимальная величина механической диссипации энергии, которую может осуществить материал до разрушения. Теперь, используя формулу (16), находим приращение диссипации для догружения $d\sigma_t$, а именно

$$dg_t = \sigma_t \cdot d\varepsilon_t^p,$$

где $d\varepsilon_t^p = w_t \cdot d\sigma_t$. Затем вычисляем полную диссипацию в точке a . Так как в точке t диссипация равна нулю, $g_a = dg_t$. Тогда $E_a^p = \varphi(g_a)$, $\nu_a^p = \psi(g_a)$, и, опираясь на формулы (12), (14), получаем компоненты тензора w_a . Наконец, находим полный вектор напряжения в точке a . Он равен $\sigma_a = \sigma_t + d\sigma_t$. Производя дальнейшее догружение, повторяем всю процедуру.

Данный процесс является одним из вариантов реализации концепции локальной предельной поверхности, которая заключается в следующем. Начало системы координат трехмерного пространства напряжений переносим в угловую точку. При этом координатные плоскости совпадают с плоскостями $f_k = 0$. Состояние материала считаем естественным, забыв предысторию деформирования. Согласно инкрементальному закону (17) полагаем, что в ходе малого догружения свойства материала не изменяются. Тогда около угловой точки по аналогии с начальной поверхностью текучести можно построить локальную предельную поверхность, причем конец реального вектора догружения $d\sigma$ всегда лежит на этой поверхности. Ее вид, очевидно, зависит от свойств материала в угловой точке, определяемых предысторией деформирования. В рассуждениях, приведенных выше, такой локальной поверхностью является поверхность равной диссипации. Далее считаем, что

изменение свойств материала происходит тогда, когда конец вектора догружения попадает на локальную поверхность. При этом свойства не зависят от расположения конца вектора догружения на поверхности. Тогда из угловой точки проводим догружение до локальной поверхности, отвечающее одноосному деформированию, и определяем свойства материала, используя экспериментальные данные, полученные при одноосном нагружении.

5. Деформирование и разрушение неоднородного диска

В качестве примера рассмотрим тонкий круглый диск с радиусом b , растягиваемый либо равномерно распределенным по ободу усилием интенсивностью p , либо посредством задания точкам границы радиального перемещения u_b (рис.2). В первом случае имеем нагружение по мягкой схеме, во втором — по жесткой. Пусть центральная зона диска радиуса a (рис.2) ослаблена. Материал ее при нагружении может проходить все стадии деформирования, вплоть до разрушения. Материал же окружающего кольца всегда сохраняет упругость.

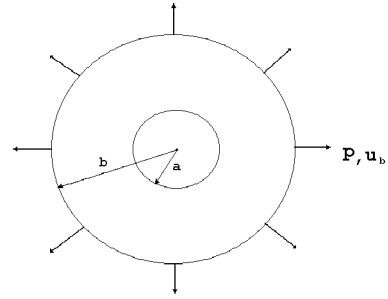


Рис.2

Требуется для возрастающей нагрузки найти напряженно-деформированное состояние, величину усилия, при котором разрушается центральная зона, и оценить характер разрушения.

Свойства материала центральной зоны при одноосном растяжении характеризуются инкрементальными модулями

$$E^p(\text{МПа}) = \begin{cases} 2 \cdot 10^5, & 0 \leq \varepsilon_1 < 0.003; \\ -22.22 \cdot 10^6 \varepsilon_1 + 2.67 \cdot 10^5, & 0.003 \leq \varepsilon_1 \leq 0.012; \\ -41.67 \cdot 10^6 \varepsilon_1 + 5 \cdot 10^5, & 0.012 \leq \varepsilon_1 \leq 0.018; \\ 41.67 \cdot 10^6 \varepsilon_1 - 10^6, & 0.018 \leq \varepsilon_1 \leq 0.024; \end{cases}$$

$$\nu^p = \begin{cases} 0.3, & 0 \leq \varepsilon_1 \leq 0.003; \\ 22.22 \varepsilon_1 + 0.23, & 0.003 \leq \varepsilon_1 \leq 0.012; \\ -66.67 \varepsilon_1 + 1.3, & 0.012 \leq \varepsilon_1 \leq 0.018; \\ -16.67 \varepsilon_1 + 0.4, & 0.018 \leq \varepsilon_1 \leq 0.024. \end{cases}$$

Теперь по формуле (21) определяем диссипацию для каждого значения деформации и затем зависимости $\varphi(g)$ и $\psi(g)$, которые аппроксимируются

выражениями

$$E^p = \varphi(g) = \begin{cases} (1.871 - \sqrt{5.735g}) 10^3, & 0 \leq g \leq 0.6075; \\ (-2.133g + 1.296) 10^3, & 0.6075 \leq g \leq 1.7794; \\ -10^4 \sqrt{0.445 - 0.215g}, & 1.7794 \leq g \leq 2.07; \end{cases} \quad (22)$$

$$\nu^p = \psi(g) = \begin{cases} \{0.3 + \sqrt{g/3.9}, & 0 \leq g \leq 0.6075; \\ -0.3413g + 0.7074, & 0.6075 \leq g \leq 1.7794; \\ \sqrt{(2.07 - g)/29.06}, & 1.7794 \leq g \leq 2.07. \end{cases} \quad (23)$$

Отметим, что в отрезке $0 \leq \varepsilon_1 \leq 0.003$ имеем $g = 0$. Напряженно-деформированное состояние диска осесимметричное. Уравнения краевой задачи в цилиндрической системе координат с учетом соотношения (15) для данного случая имеют вид:

— уравнение равновесия

$$d\sigma_r/dr + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0, \quad (24)$$

— геометрические соотношения

$$\varepsilon_r = du/dr, \quad \varepsilon_\theta = u/r, \quad (25)$$

— физические соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_r &= E(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta)/(1 - \nu^2), \quad \sigma_\theta = E(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r)/(1 - \nu^2), \quad a < r \leq b, \\ \sigma_r &= E(\varepsilon_r + \nu\varepsilon_\theta - \varepsilon_r^p - \nu\varepsilon_\theta^p)/(1 - \nu^2), \\ \sigma_\theta &= E(\varepsilon_\theta + \nu\varepsilon_r - \varepsilon_\theta^p - \nu\varepsilon_r^p)/(1 - \nu^2), \quad 0 \leq r \leq a. \end{aligned} \quad (26)$$

Граничные условия при мягком нагружении

$$\sigma_r|_{r=b} = p, \quad (27)$$

при жестком нагружении

$$u|_{r=b} = u_b. \quad (28)$$

Здесь $\sigma_r, \sigma_\theta, \varepsilon_r, \varepsilon_\theta$ — соответственно радиальные и тангенсальные напряжения и деформации, u — радиальное перемещение. Так как пластические составляющие деформаций заранее неизвестны, система (24)–(28) дополняется кинетическими уравнениями (18), описывающими процесс формирования пластических деформаций в центральной зоне диска. Учитывая, что в этой зоне $d\sigma_r = d\sigma_\theta = d\sigma$, $d\varepsilon_r = d\varepsilon_\theta = d\varepsilon$, имеем

$$d\varepsilon^p = (1 - \nu_r)d\sigma/h^p, \quad d\varepsilon_z^p = -2\nu_r d\sigma/h^p. \quad (29)$$

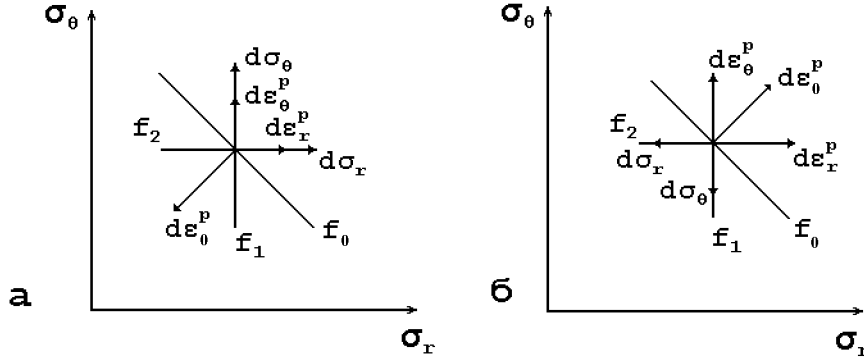


Рис.3

Кроме того,

$$d\sigma = E^p d\varepsilon / (1 - \nu^p), \quad d\varepsilon_z = -2\nu^p d\varepsilon / (1 - \nu^p). \quad (30)$$

Здесь $d\varepsilon_z, d\varepsilon_z^p$ — приращения деформаций в направлении, перпендикулярном плоскости диска.

На рис.3 для данной задачи на плоскости главных напряжений показаны прямые, являющиеся пересечением с этой плоскостью поверхностей, образующих угловую точку, и соответствующие им направления приращений пластических деформаций как для упрочнения (рис.3,а), так и для разупрочнения (рис.3,б).

Используя подход П.Ф.Папковича [9], разобьем систему (24)–(28) на основную и корректирующую. Основную задачу составляют уравнения (24)–(28) при $\varepsilon_r^p = \varepsilon_\theta^p = 0$ (обычная краевая задача теории упругости). Корректирующая задача включает уравнения (24)–(28) и нулевые граничные условия ($p = 0$ или $u_b = 0$). Эта задача по определению самоуравновешенных собственных напряжений в упругом теле при нулевых граничных условиях. Возникновение таких напряжений инициируют несовместные пластические деформации. Решение основной задачи для мягкого нагружения

$$\sigma'_r = \sigma'_\theta = p, \quad \varepsilon'_r = \varepsilon'_\theta = (1 - \nu)p/E, \quad \varepsilon'_z = -2\nu p/E, \quad (31)$$

для жесткого нагружения

$$\sigma'_r = \sigma'_\theta = E u_b / b (1 - \nu), \quad \varepsilon'_r = \varepsilon'_\theta = u_b / b, \quad \varepsilon'_z = -2\nu u_b / b (1 - \nu). \quad (32)$$

Решение корректирующей задачи для мягкого нагружения ($\varepsilon_r^p = \varepsilon_\theta^p = \varepsilon^p$, $0 \leq r \leq a$; $\varepsilon^p = 0, a < r \leq b$)

$$\sigma''_r = \sigma''_\theta = -0.5\varepsilon^p E \left(1 - a^2/b^2\right),$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_r &= \varepsilon'_\theta = 0.5\varepsilon^p \left[(1+\nu) + (1-\nu) a^2/b^2 \right], \quad 0 \leq r \leq a, \\
\sigma''_{r,\theta} &= 0.5\varepsilon^p E a^2 \left(1/b^2 \mp 1/r^2 \right), \\
\varepsilon'_{r,\theta} &= 0.5\varepsilon^p a^2 \left[(1-\nu)/b^2 \mp (1+\nu)/r^2 \right], \quad a < r \leq b,
\end{aligned} \tag{33}$$

для жесткого нагружения

$$\begin{aligned}
\sigma''_r &= \sigma''_\theta = -\varepsilon^p E (b^2(1-\nu) + a^2(1+\nu))/2b^2(1-\nu), \\
\varepsilon'_r &= \varepsilon'_\theta = \varepsilon^p(1+\nu) (b^2 - a^2)/2b^2, \quad 0 \leq r \leq a, \\
\sigma''_{r,\theta} &= -0.5\varepsilon^p E a^2 \left[(1+\nu)/b^2(1-\nu) \pm 1/r^2 \right], \\
\varepsilon'_{r,\theta} &= -0.5\varepsilon^p a^2(1+\nu) \left[1/b^2 \pm 1/r^2 \right], \quad a < r \leq b.
\end{aligned} \tag{34}$$

Непосредственно проверяется, что при известной величине ε^p сумма решений основной и корректирующей задач дает решение системы (24)–(28).

Решение основной задачи удовлетворяет уравнению равновесия и граничным условиям, но не отвечает физическим соотношениям. Следовательно, необходимо найти такое значение ε^p , чтобы корректирующее решение, которое не нарушает равновесия и граничных условий, в сумме с основным давало решение исходной нелинейной задачи, включающей кинематические уравнения (29).

Из рассуждений, приведенных выше, вытекает и методика решения исходной задачи. Пусть в некотором положении равновесия состояние материала характеризуется параметрами g, E^p, ν^p , а напряженно-деформированное состояние определяется векторами σ и ε . Возмутим это положение равновесия, увеличив усилия на границе на Δp или перемещения точек границы на Δu_b . Тогда первое приближение равно $\sigma_1^c = \sigma + d\sigma_1^c$, $\varepsilon_1 = \varepsilon + d\varepsilon_1$, где компоненты векторов $d\sigma_1^c, d\varepsilon_1$ определены по формулам (31) или (32), в которых вместо p или u_b фигурируют Δp или Δu_b . Затем по формулам (29) с учетом (30) вычисляем компоненты вектора $d\varepsilon_1^p$, а именно $de_{1r}^p = de_{1\theta}^p = de_1^p$. Далее находим $dg_1 = \sigma \cdot d\varepsilon_1^p$, $g_1 = g + dg_1$ и, используя выражения (22), (23), значения E_1^p, ν_1^p .

В завершение данного этапа определяем в центральной зоне вектор $\sigma_1 = \sigma + d\sigma_1$, конец которого лежит на предельной поверхности, а $d\sigma_1$ — вектор догружения, исходящий из угловой точки. Его компоненты равны $d\sigma_{1r} = E^p d\varepsilon_{1r}/(1-\nu^p)$, $d\sigma_{1\theta} = d\sigma_{1r}$.

Теперь по формулам (34) или (35), где $\varepsilon^p = de_1^p$, ищем решение корректирующей задачи и получаем второе приближение, а именно вектора $\sigma_2^c = \sigma_1^c + d\sigma_1''$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 + d\varepsilon_1'$. Используя вектор $d\varepsilon_1'$, находим вектор $d\varepsilon_2^p$ с компонентами $de_{2r}^p = de_{2\theta}^p = de_2^p$. Далее вычисляем $dg_2 = \sigma_1 \cdot d\varepsilon_2^p$, $g_2 = g_1 + dg_2$

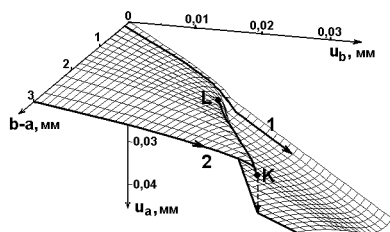


Рис.4

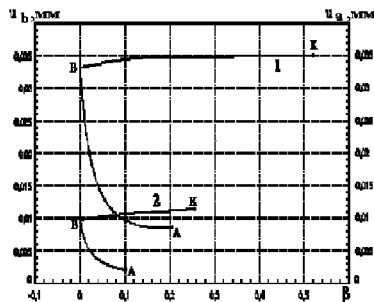


Рис.5

и значения E_2^p, ν_2^p . В заключение находим вектор $\sigma_2 = \sigma_1 + d\sigma_2$, где $d\sigma_{2r} = E_1^p d\varepsilon'_{1r} / (1 - \nu_1^p)$, $d\sigma_{2\theta} = d\sigma_{2r}$. Далее процесс повторяется.

При проведении вычислений полагаем $a = 1$ мм, радиус b постепенно увеличиваем. В качестве начальной предельной поверхности берем эллипс Мизеса с уравнением $\sigma_i = \sigma_1^T$, где σ_i — интенсивность напряжений [10], $\sigma_1^T = 600$ МПа. По результатам расчетов напряженно-деформированного состояния при возрастающем перемещении точек границы u_b построена поверхность (рис.4), связывающая задаваемые параметры $b - a, u_b$ и параметр состояния u_a в положениях равновесия.

Эта поверхность равновесных состояний обладает особенностью — сборкой Уитни [11], которая является проявлением особенностей деформирования неоднородного диска. Если $b - a < 0.6$, то путь нагружения (например, путь 1 на рис.4) не пересекает линии сборки LK и процесс деформирования протекает равномерно. Диск плавно переходит из одного устойчивого положения равновесия в другое, вплоть до разрушения внутренней зоны. Когда $b - a > 0.6$, то путь нагружения (например, путь 2 на рис.4) пересекает линию сборки. В этот момент лист, на котором он находился, “исчезает” и происходит прыжок на нижний лист поверхности. Следовательно, в точке К при $u_b = 0.034$ мм процесс деформирования теряет устойчивость и диск скачком переходит в новое положение равновесия. Существенная зависимость характера развития деформаций от величины $b - a$ отражает влияние масштабного фактора на устойчивость протекания процессов внутри диска.

В ходе итераций проводили также вычисления коэффициента дилатации β по формуле (13). На рис.5 для $b - a = 3$ приведена диаграмма $\beta - u_b$ (кривая 1).

В точке А начинается упрочнение материала внутренней зоны, в точке В материал переходит на стадию разупрочнения, в точке К происходит потеря устойчивости. От А до В наблюдается увеличение коэффициента поперечной деформации ν^p до 0.5. Остаточные объемные деформации умень-

шаются до нуля (точка В). На стадии разупрочнения, когда ν^p начинает уменьшаться, остаточные объемные деформации увеличиваются и уже преобладают над остаточными сдвиговыми деформациями, т.е. материал существенно разрыхляется и разрушение материала приобретает тенденцию к отрыву.

Наконец, на рис.6 показана поверхность равновесных состояний, полученная для мягкого нагружения при плавном увеличении внешнего усилия p . Видно, что линия сборки KL пересекает всю поверхность. Поэтому всегда существует такое значение p , после достижения которого деформирование диска теряет устойчивость.

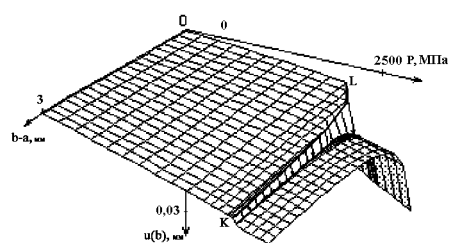


Рис.6

Когда $b - a = 3$ мм, это происходит при $p = 28 \cdot 10^2$ МПа, когда $b - a = 0.2$ мм, то скачок реализуется при $p = 20 \cdot 10^2$ МПа. Отметим, что чем больше значение $b - a$, тем меньше величина скачка. Следовательно, массивные тела малочувствительны к скачкообразным локальным разрушениям.

6. Деформирование и разрушение неоднородного диска под действием остаточных напряжений

Пусть внутренняя зона в свободном от связей состоянии имеет остаточные деформации $\varepsilon_r^* = \varepsilon_\theta^* = \varepsilon^* < 0$. В сплошном теле эти деформации не удовлетворяют условиям совместности. Чтобы они удовлетворялись, после восстановления связей к внутреннему диску нужно приложить некоторое растягивающее усилие. Таким образом в неоднородном диске возникает поле самоуравновешенных остаточных напряжений. Требуется найти параметры положений равновесия диска для различных значений ε^* и определить их критическое значение, при достижении которого процесс формирования остаточных напряжений теряет устойчивость.

Исходная краевая задача в этом случае содержит уравнения (24), (25), физические соотношения в кольце остаются неизменными, а во внутренней зоне принимает вид

$$\sigma_r = E (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta - \varepsilon_r^* - \nu \varepsilon_\theta^* - \varepsilon_r^p - \nu \varepsilon_\theta^p) / (1 - \nu^2),$$

$$\sigma_\theta = E (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r - \varepsilon_\theta^* - \nu \varepsilon_r^* - \varepsilon_\theta^p - \nu \varepsilon_r^p) / (1 - \nu^2).$$

Система дополняется еще кинетическим уравнением (29) и граничным условием $\sigma_r|_{r=b} = 0$. Основная задача состоит из уравнений исходной задачи при $\varepsilon_r^p = \varepsilon_\theta^p = 0$, корректирующая — из тех же уравнений при $\varepsilon_r^* = \varepsilon_\theta^* = 0$.

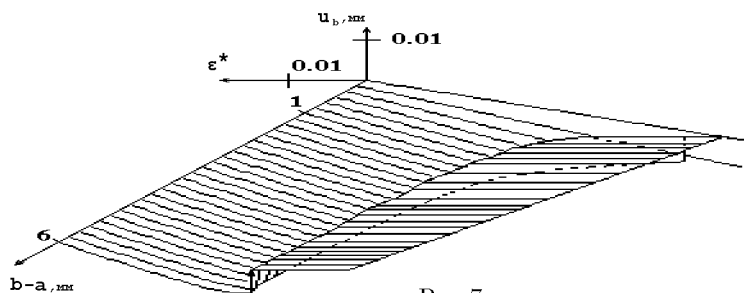


Рис.7

Решения их определяются формулами (34). Методика расчета остается прежней, только в ней используются деформации внутреннего диска, отсчитываемые от его ненапряженного состояния.

На рис.7 показана поверхность равновесных состояний при плавном уменьшении деформаций $\varepsilon_r^* = \varepsilon_\theta^* = \varepsilon^*$. Видно, что за исключением малых значений $b - a$ всегда существует такая деформация ε^* , при которой уравнивание системы происходит только после скачка. Например, для $b - a = 6$ мм критическое значение $\varepsilon^* = -0.025$.

Наконец, в ходе определения напряженно-деформированного состояния, как и ранее, рассчитываем параметр β . Зависимость $\beta - u_a$ изображена на рис.5, кривая 2. Она имеет тот же характер, что и кривая 1. Следовательно, при больших по модулю ε^* также проявляется тенденция к разрушению отрывом.

Литература

1. Стружанов В.В. Ассоциированный и инкрементальный законы пластического течения для сред, проявляющих деформационное разупрочнение // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. №10. (Математика и Механика. Вып.1.) С.92–101.
2. Волков С.Д., Гуськов Ю.П., Кривоспицкая В.И. и др. Экспериментальные функции сопротивления легированной стали при растяжении и кручении // Пробл. прочности. 1979. Т.11, №1. С.3–6.
3. Никитин Л.В. Направления развития моделей упруговязкопластических тел // Механика и научно-технический прогресс. Т.3: Механика деформируемого твердого тела. М.:Наука, 1988. С.136–153.
4. Шевченко Ю.Н. К построению поверхности нагружения в теории пластичности // Прикладная механика. 1996. Т.32, №11. С.31–37.
5. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М: Наука, 1970. Т.2.

6. РАЙС Дж.Р. Об устойчивости дилатантного упрочнения насыщенных скальных массивов // Механика: Новое в зарубежной науке. Т.2: Определяющие законы механики грунтов. М: Мир, 1975. С.195–209.
7. ИВЛЕВ Д.Д., БЫКОВЦЕВ Г.И. Теория упрочняющегося пластического тела. М.: Наука, 1971.
8. РЫХЛЕВСКИЙ Я. О законе Гука // Приклад. математика и механика. 1984. Т.48, №3. С.420–435.
9. ПАПКОВИЧ П.Ф. Теория упругости. М.:Оборонгиз, 1939.
10. БЕЗУХОВ Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.:Выш. шк., 1988.
11. ПОСТОН Т., СТЮАРТ И. Теория катастроф и ее приложения. М.:Мир, 1980.

*Статья поступила 03.03.1999 г.;
окончательный вариант 28.09.1999 г.*